

Durée : 2 heures

**La qualité de la rédaction est importante. Toutes les réponses doivent être justifiées avec précision. Les calculatrices sont autorisées.**

**Exercice 1** (10 pts)

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  :

- la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$  ;
- la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = 2^n$ .

**Partie A : Conjectures**

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

|   | A        | B           | C           |
|---|----------|-------------|-------------|
| 1 | rang $n$ | terme $u_n$ | terme $v_n$ |
| 2 | 0        | 1           | 1           |
| 3 | 1        | 5           | 2           |
| 4 | 2        | 12          | 4           |
| 5 | 3        | 25          | 8           |
| 6 | 4        | 50          | 16          |

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

|    |    |       |      |
|----|----|-------|------|
| 12 | 10 | 3080  | 1024 |
| 13 | 11 | 6153  | 2048 |
| 14 | 12 | 12298 | 4096 |
| 15 | 13 | 24587 | 8192 |

Conjecturer les limites des suites  $(u_n)$  et  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .

**Partie B : Etude de la suite  $(u_n)$** 

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

**Partie C : Etude de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$** 

1. Démontrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est décroissante à partir du rang 3.
2. Donner, pour tout  $n$ , une écriture de  $\frac{u_n}{v_n}$  sous la forme d'une somme de trois termes.
3. On admet que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4, on a :  $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ .

Déterminer la limite de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .

## Exercice 2 (6 pts)

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

### Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants :

- $C$  : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- $S$  : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- $E$  : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- $H$  : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?  
On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .

### Partie B

On prélève au hasard 10 arbres parmi les arbres abattus. On admet que le nombre d'arbres abattus est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre d'arbres vendus à un habitant de la commune parmi ces 10 arbres.

1. Quelle est la loi suivie par  $X$  ? Justifier.
2. Calculer la probabilité que, parmi ces dix arbres, un seul soit vendu à un habitant de la commune.
3. Calculer la probabilité que, parmi ces dix arbres, au moins quatre arbres soient vendus à un habitant de la commune.

**Exercice 3 (4 pts)**

**Cet exercice est un QCM.**

**Indiquer la ou les bonnes réponses pour chaque question.**

1. Soient  $A$  et  $B$  deux évènements incompatibles mais non impossibles. Alors :
  - (a) On ne peut pas savoir si  $A$  et  $B$  sont indépendants.
  - (b) Il est certain que  $A$  et  $B$  sont indépendants.
  - (c) Il est certain que  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.
  - (d)  $A$  et  $\overline{B}$  sont incompatibles.
  - (e)  $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.
2. Soient  $A$  et  $B$  deux évènements indépendants. On donne  $P(A) = 0,3$  et  $P(B) = 0,5$ . Alors :
  - (a)  $P(A \cup B) = 0,65$
  - (b)  $P(A \cup B) = 0,8$
  - (c)  $P(A \cup B) = 0,15$
  - (d) On ne peut pas calculer  $P(A \cup B)$
  - (e)  $P(A \cap B) = 0$
3. Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements indépendants de probabilités non nulles, alors :
  - (a)  $A \cap B = \emptyset$
  - (b)  $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$
  - (c)  $P_A(B) = P(B)$
  - (d)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - (e)  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
4. Soient  $C$  et  $D$  deux évènements indépendants. On donne  $P(C) = 1/3$  et  $P(D) = 1/12$ . Alors :
  - (a)  $P(C \cup D) = 7/18$
  - (b)  $P(D \cup C) = 1/36$
  - (c)  $P(C \cup D) = 5/12$
  - (d)  $P(D \cap C) = 1/36$
  - (e)  $P_D(\overline{C}) = 1 - P(C)$