

Durée : 2 heures

**Les calculatrices sont autorisées.****Exercice 1 (5 pts)**

Déterminer les limites suivantes en détaillant les justifications.

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((0,3)^n + n^3)$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 - 2}{3n^2 + 4n}$
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n + (-1)^n}{n^2}\right)$
5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\sqrt{n} - n \sin(n))$

**Exercice 2 (5 pts)**

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pieds.

Frais et dispo, il peut parcourir 50 km en une journée. Mais chaque jour, la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1 % chaque jour.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $d_n$  la distance parcourue le  $n$ -ième jour et  $D_n$  la distance totale parcourue au bout de  $n$  jours, en km.

1. Préciser la nature de la suite  $(d_n)$ . En déduire l'expression de  $d_n$  en fonction de  $n$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $D_n = 5000 \times (1 - 0,99^n)$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(D_n)$ . Le globe-trotter peut-il gagner son pari ?
4. **À l'aide de la calculatrice**, déterminer le nombre minimal de jours  $N$  qui lui seraient nécessaires pour parcourir 1500 km. Expliquer la méthode utilisée.

**Exercice 3** (10 pts)

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$ .

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite  $(u_n)$  approchées à  $10^{-2}$  près :

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $u_n$ | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |

- (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a  $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$ .  
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .  
 (c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .  
 Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 10 \times (0,5)^n$ .  
 (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ .  
 On précisera le premier terme de la suite  $(v_n)$ .  
 (b) En déduire, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times (0,5)^n$ .  
 (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant où  $n$  et  $u$  sont des nombres, afin que la valeur finale de  $n$  soit la plus petite valeur de  $n$  telle que  $u_n \leq 0,01$ .

|                      |     |
|----------------------|-----|
| $n \leftarrow 0$     |     |
| $u \leftarrow 2$     |     |
| Tant que ...         | (1) |
| $n \leftarrow \dots$ | (2) |
| $u \leftarrow \dots$ | (3) |
| Fin de Tant que      |     |