

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Introduction

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n . Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2, n = 3$, etc :

pour $n = 2$:

pour $n = 3$:

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n .

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : Le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré). Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.

1.2 Principe de récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que P_n est vraie pour $n = n_0$.
C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P_k est vraie. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.
C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.
- Conclusion : P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

1.3 Exemple

Montrons que $\sum_{q=1}^n q = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation :

.....

Hérédité :

.....

Conclusion :

2 Comportement d'une suite numérique

Par "étudier le comportement de la suite (u_n) ", on sous-entend étudier les propriétés du nombre u_n lorsque l'entier n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini ...).

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

— majorée par M si

— minorée par m si

— bornée si

Exemples

— Soit la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \dots\}$

— Soit la suite $(n^2)_{n \geq 0} = \{\dots\}$.

2.2 Limite finie d'une suite

Définitions

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient

.....

On écrit alors :

Interprétation graphique :

2.3 Limite infinie d'une suite

Définitions

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $] -\infty; A[$) contient

On écrit alors :

Interprétation graphique :

2.4 Limites des suites usuelles

Théorèmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \dots$$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = \dots$$

Preuve de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$:

3 Opérations sur les limites

3.1 Somme de deux suites

Somme de deux suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$						

3.2 Produit de deux suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$			

3.3 Quotient de deux suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$						

La règle des signes s'applique si v_n est de signe constant sinon il n'y a pas de limite.

3.4 Exemple

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2}{3n+5}$

3.5 Formes indéterminées

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note

mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Le principe est toujours le même pour "lever" une indétermination : il faut changer l'écriture de la suite.

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

Exemple 2 : $u_n = \frac{3n+5}{-2n+7}$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

4 Limites et comparaison

4.1 Comparaison

Théorèmes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

— Minoration : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors

— Majoration : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors

Démonstration du théorème de minoration (**ROC**) :

Théorème "des gendarmes" (admis)

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) . Soit un entier N et un réel ℓ . On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (v_n)

4.2 Cas des suites monotones et convergentes

Théorème :

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ . Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n ,

5 Convergence de certaines suites

5.1 Convergence des suites monotones

Théorème :

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant de la suite.

Corollaire : Une suite croissante non majorée

Preuve (**ROC**) :

5.2 Limite d'une suite géométrique

Théorème : soit q un réel.

Si $q > 1$, alors la suite (q^n)

Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n)

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n)

Preuve pour $q > 1$ (**ROC**) :