

Terminale S (2016-2017) Produit scalaire dans l'espace

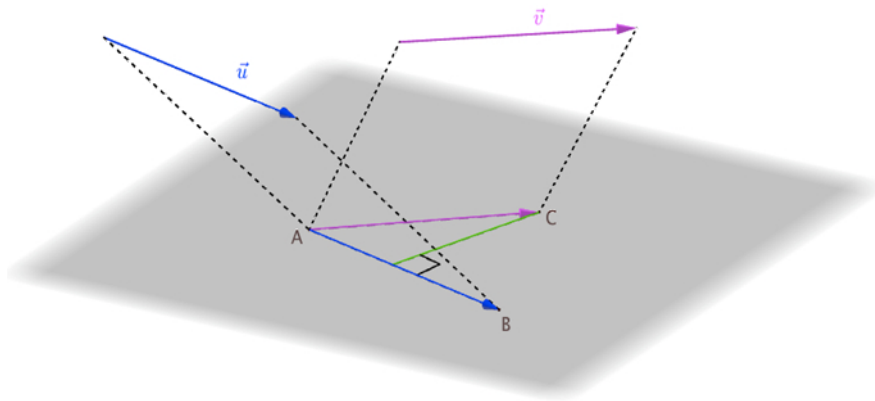
1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définitions

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C .

Définition :

On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P .



On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2) = \frac{1}{2} (\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2)$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition avec l'angle :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Définition avec le projeté orthogonal :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens différents.}$$

1.2 Propriétés

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \|^2 = \vec{u}^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (k \vec{u}) \cdot \vec{v} &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) \\ (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2\end{aligned}$$

1.3 Orthogonalité

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque

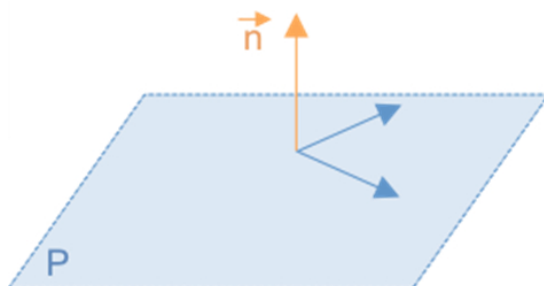
Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

2 Equations cartésiennes de l'espace

2.1 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à P .



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Preuve (exigible)

$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P , elle est en particulier orthogonale aux droites d_1 et d_2 contenues dans P .

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs des droites d , d_1 et d_2 .

Comme d est orthogonale à d_1 et d_2 , alors $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Soit Δ une droite du plan P , de vecteur directeur $\vec{w}$.

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et constituent donc une base du plan P . Ainsi, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$.

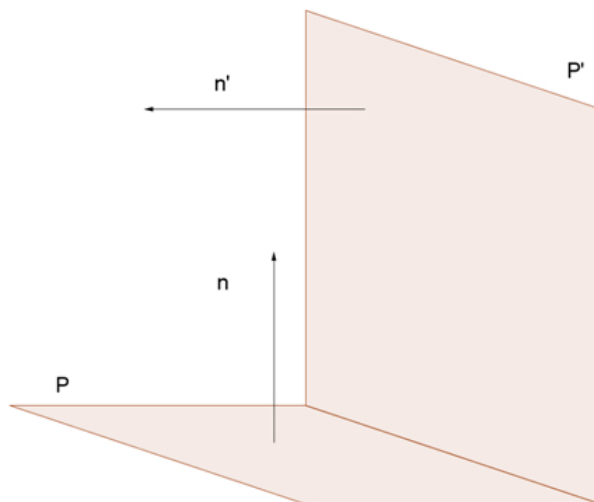
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2) = x \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, et donc la droite d est orthogonale à la droite Δ .

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.



2.2 Equations cartésiennes d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$.

Preuve (exigible)

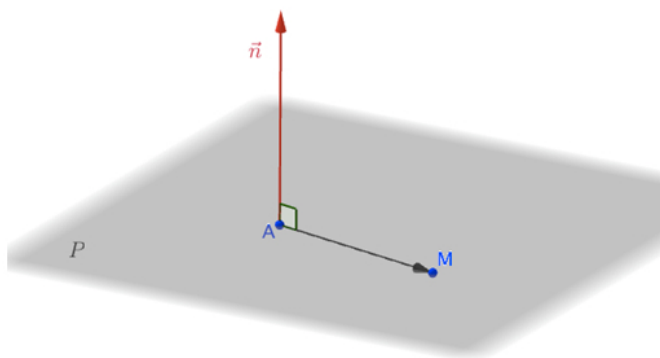
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P .

$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$



Réciproquement :

Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).

On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Alors le point $A(-d/a; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + d/a) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$$

E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Remarque

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation $2x + 2y + 6z + 4 = 0$.

2.3 Equations cartésiennes d'une droite

Propriété Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.

Preuve

Si les vecteurs $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n'}(a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants selon une seule droite.