Cours de terminale S
Calcul intégral

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

17 janvier 2020

Définition

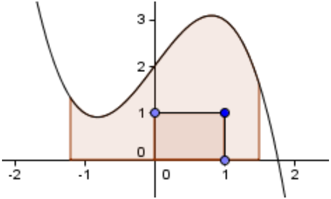
Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

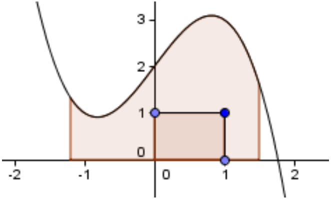
On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$, ...
....
....

Définition

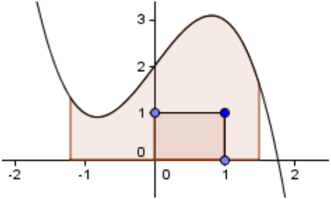
Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.


3
2
1
0
-2
-1
0
1
2



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On dit aussi que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b.

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \dots$$

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \dots$$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit aussi " somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ".

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ....

....

....

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[a; b]$.

De plus $F(a) = 0$.

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $[a; b]$.

De plus $F(a) = 0$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, ...

. . . .

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a;b]$ et $h > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a;b]$ et $h > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est ....

....

....

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

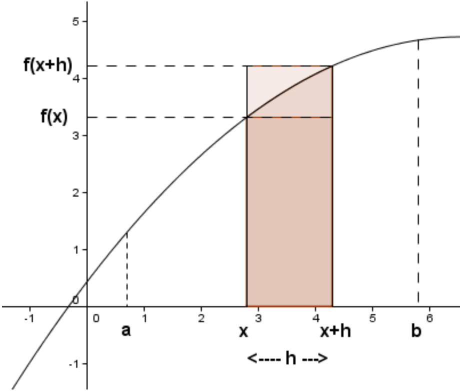
Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et $x+h$.

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et

$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses x et $x+h$.


f(x+h)
f(x)
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
a
x
x+h
b
<---- h --->

On a donc ....
....
....

On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h).$$

On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que
$f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \ldots$

On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que
$f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h).$$

Puisque la fonction f est continue, $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

....

....

On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que
$f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

On a donc $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, ce qui, dans le cas où f est croissante, entraîne que
$f(x) \leq \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ ce qui signifie que F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si ....

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que . . . .
. . . .

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que " f est la fonction dérivée de F sur I ".

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que " f est la fonction dérivée de F sur I ".

Théorème

Toute fonction continue ....
....

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, ...

....

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par
$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;
g est ....
....
....

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;
g est continue et positive sur $[a; b]$, donc admet une primitive G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Alors la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a; b]$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.
Si f est positive, on a vu que la fonction F définie par

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

Sinon, on admet que f a un mininum m sur $[a; b]$ et on défini une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;
g est continue et positive sur $[a; b]$, donc admet une primitive G définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Alors la fonction F définie par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a; b]$.

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, ...
....
....

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I.

Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I, alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de f sur I.

Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; . . . .
. . . .

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par ....
....

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors ....
....

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction F unique, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + c$; la condition $F(x_0) = y_0$ implique $c = y_0 - G(x_0)$ et c est unique.

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

• si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I.

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a\,,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a\,,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0:+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0:+\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a\,,\, a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n\,,\, n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)\,,\ a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) =$

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$I = K$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J, dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f = u' \times u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u'e^u$	$I = J$	$F(x) = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$I = K$	$F(x) = \ln u$

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors ....
....

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors l'intégrale de a à b de la fonction f est égale au nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Démonstration

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

. . . .

. . . .

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :

....

....

Démonstration

On sait que f admet des primitives sur $[a; b]$, par exemple la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

$G(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $G(a) = 0$ donc on a bien

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Il reste à démontrer que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la primitive :
si F une primitive quelconque de f, alors $F(x) = G(x) + c$ et on vérifie alors que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.

. . . .

. . . .

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale entre a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.
On note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Exemple

Pour $x > 0$, $$\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

Propriétés

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

Propriétés

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

Propriétés

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Inversion des bornes

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

Propriétés

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Inversion des bornes

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I.

Propriétés

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Inversion des bornes

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

Propriétés

Relation de Chasles

. . . .

Propriétés

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Propriétés

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

Propriétés

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

Linéarité : si k est un réel quelconque, alors

....

Propriétés

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

Linéarité : si k est un réel quelconque, alors

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Propriétés

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

Linéarité : si k est un réel quelconque, alors

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

Propriétés

Linéarité

. . . .

Propriétés

Linéarité

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Propriétés

Linéarité

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

. . . .

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

. . . .

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a; b]$$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Calcul d'aires

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

$$A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a; b]$$

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

Calcul d'aires

si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Démonstration : par définition, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ *où* F *une primitive de* f *sur* $[a; b]$*, c'est-à-dire* $F' = f$ *;*

Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Démonstration : par définition, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ *où* F *une primitive de* f *sur* $[a; b]$, *c'est-à-dire* $F' = f$ *;*
donc, si $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a; b]$, *alors* F *est croissante sur* $[a; b]$ *;*

Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Démonstration : par définition, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ *où* F *une primitive de* f *sur* $[a; b]$*, c'est-à-dire* $F' = f$ *;*
donc, si $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a; b]$*, alors* F *est croissante sur* $[a; b]$ *;*
donc $F(b) \geq F(a)$ *et* $F(b) - F(a) \geq 0$*.*

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Pour la démonstration, considérer la fonction $h = g - f$.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i + 1)h]$, où i varie de 0 à $n - 1$, on a l'encadrement

. . . .

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

$$f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$$

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

$$f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$$

Donc . . . .

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i+1)h]$, où i varie de 0 à $n - 1$, on a l'encadrement

$$f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$$

Donc $hf(a+ih) \leq \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\mathrm{d}x \leq hf(a+(i+1)h)$

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

$$f(a+ih) \leq f(x) \leq f(a+(i+1)h)$$

Donc $hf(a+ih) \leq \displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\mathrm{d}x \leq hf(a+(i+1)h)$, où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

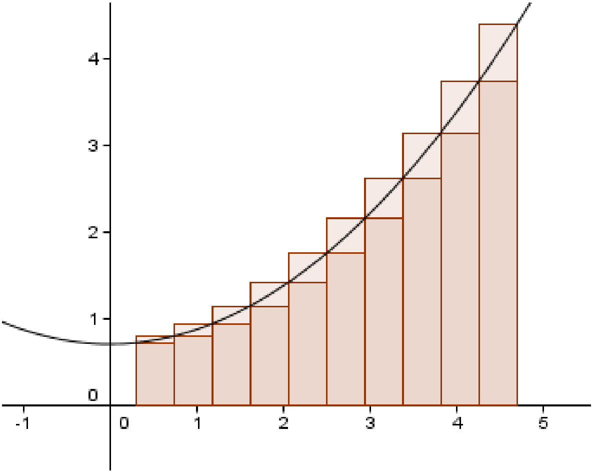
. . . .

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h)$$

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h)$$


4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5

Algorithme : les variables sont a et b les bornes de l'intervalle, n le nombre de rectangles, h le pas (la largeur des rectangles), x l'abscisse courante, s1 et s2 les sommes des aires.

$h \leftarrow (b-a)/n$
s1 $\leftarrow$ 0
s2 $\leftarrow$ 0
$x \leftarrow a$
POUR i variant de 0 à $n-1$
    s1 $\leftarrow$ s1 $+f(x)$
    $x \leftarrow x + h$
    s2 $\leftarrow$ s2 $+f(x)$
FIN POUR
s1 $\leftarrow$ h * s1
s2 $\leftarrow$ h * s2

Si la fonction f est simplement continue sur $[a; b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant $f(x)$, sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i + 1)h]$, par : $f(a + (i + 1/2)h)$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

et si $a < b$, ...

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

et si $a < b$, $\quad m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

$$\text{et si } a < b, \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M$$

Démonstration à l'aide du théorème précédent.

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$