

# CALCUL INTEGRAL

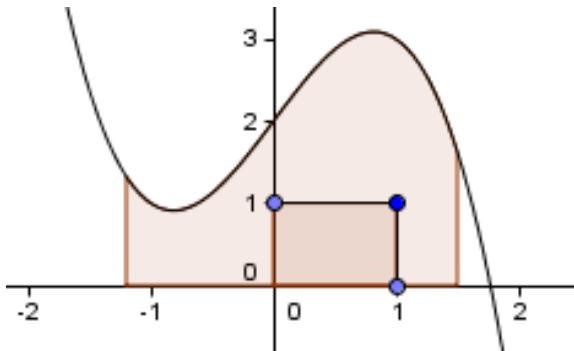
## 1 Intégrale d'une fonction continue et positive

### 1.1 Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques tels que  $a < b$ ,  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; I, J)$ .

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés  $[OI]$  et  $[OJ]$ .

On appelle **intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$** , l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$ , et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .



L'intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$  se note  $\int_a^b f(x)dx$ .

On dit aussi que  $\int_a^b f(x)dx$  représente l'**aire sous la courbe** entre  $a$  et  $b$ .

### 1.2 Remarque

Dans l'écriture  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $x$  est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre, exceptées  $a$  et  $b$  :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \dots$$

$\int_a^b f(x)dx$  se lit aussi " somme de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$ ".

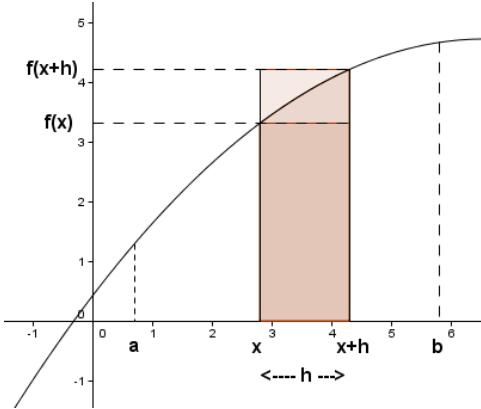
### 1.3 Théorème

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$ ; la fonction  $F$  définie sur  $[a; b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est dérivable sur  $[a; b]$  et  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $[a; b]$ .  
De plus  $F(a) = 0$ .

### Démonstration dans le cas où $f$ est croissante

Pour tout  $x \in [a; b]$  et  $h > 0$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  et  $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$ .

Ainsi  $F(x+h) - F(x)$  est l'aire de la surface limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites verticales passant par les points d'abscisses  $x$  et  $x+h$ .



On a donc  $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$ , ce qui, dans le cas où  $f$  est croissante, entraîne que  $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$ .

Puisque la fonction  $f$  est continue,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$  ce qui signifie que  $F$  est dérivable en  $x$  et  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in [a; b]$ .

## 2 Primitives et intégrale

### 2.1 Définition

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

On dit qu'une fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$  si la fonction  $F$  est dérivable sur  $I$  et a pour dérivée la fonction  $f$ .

"  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  " a le même sens que "  $f$  est la fonction dérivée de  $F$  sur  $I$  ".

### 2.2 Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur cet intervalle.

#### Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$ .

Si  $f$  est positive, on a vu que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$  puisque  $F'(x) = f(x)$ .

Sinon, on admet que  $f$  a un minimum  $m$  sur  $[a; b]$  et on définit une fonction  $g$  sur  $[a; b]$ , par  $g(x) = f(x) - m$ ;

$g$  est continue et positive sur  $[a; b]$ , donc admet une primitive  $G$  définie par  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ . Alors la fonction  $F$  définie par  $F(x) = G(x) + mx$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ .

## 2.3 Théorème

Si la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $I$ , alors la fonction  $G$  définie sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + c$  où  $c$  est un nombre réel quelconque, est aussi une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $G$  définies sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + c$  où  $c$  est un nombre réel quelconque.

## 2.4 Théorème

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $x_0$  un réel appartenant à  $I$  et  $y_0$  un réel donné quelconque ; alors il existe une fonction  $F$  unique, primitive de  $f$  sur  $I$ , telle que  $F(x_0) = y_0$ .

### Démonstration

Si  $G$  est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de  $f$  sont les fonctions  $F$  définies sur  $I$  par  $F(x) = G(x) + c$  ; la condition  $F(x_0) = y_0$  implique  $c = y_0 - G(x_0)$  et  $c$  est unique.

En particulier, si  $I = [a; b]$  et si  $F$  est la fonction définie sur  $[a; b]$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  alors  $F$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

## 2.5 Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

- si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et si  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $I$  alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et si  $k$  est un nombre réel quelconque alors  $kF$  est une primitive de  $kf$  sur  $I$ .

## 2.6 Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, la fonction  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  donné :

Fonction $f$	Intervalle $I$	Primitive $F$
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$I = ]-\infty; 0[$ ou $I = ]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I = ]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I = ]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

**Fonctions composées :** on suppose que  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $J$ , dérivable et strictement positive sur un intervalle  $K$ .

Fonction $f$	Intervalle $I$	Primitive $F$
$f(x) = \cos(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$
$f(x) = \sin(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$
$f = u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	$F(x) = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
$f = u' e^u$	$I = J$	$F(x) = e^u$
$f = \frac{u'}{u}$	$I = K$	$F(x) = \ln u$

### 3 Intégrale d'une fonction continue

#### 3.1 Propriété

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ .

Alors l'intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$  est égale au nombre  $F(b) - F(a)$ .

On note :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

#### Démonstration

On sait que  $f$  admet des primitives sur  $[a; b]$ , par exemple la fonction  $G$  définie par  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt \text{ et } G(a) = 0 \text{ donc on a bien } G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Il reste à démontrer que l'intégrale de  $f$  ne dépend pas du choix de la primitive :

si  $F$  une primitive quelconque de  $f$ , alors  $F(x) = G(x) + c$  et on vérifie alors que  $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ .

#### 3.2 Définition

On généralise la notion d'intégrale :

soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux réels quelconques de  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

On appelle intégrale entre  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$  le nombre  $F(b) - F(a)$ .

On note :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### 3.3 Exemple

$$\text{Pour } x > 0, \quad \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

### 3.4 Propriétés

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $a$ ,  $b$  et  $c$  des éléments de  $I$ .

—  $\int_a^a f(x)dx = 0$

— Inversion des bornes

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

*Démonstration immédiate à l'aide de la définition.*

— Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*Démonstration immédiate à l'aide de la définition.*

— Linéarité

si  $k$  est un réel quelconque, alors

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

*Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.*

— Linéarité

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

*Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.*

## 4 Calcul d'aires

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$ .

— L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est :

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad \text{si } f \text{ est positive sur } [a; b]$$

$$A = - \int_a^b f(x)dx \quad \text{si } f \text{ est négative sur } [a; b]$$

- si  $f(x) \geq g(x)$  sur  $[a; b]$ , alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes  $C_f$  et  $C_g$  et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

## 5 Intégrales et inégalités

### 5.1 Positivité

si  $a \leq b$  et si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a; b]$  alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

*Démonstration : par définition,  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  où  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ , c'est-à-dire  $F' = f$  ; donc, si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a; b]$ , alors  $F$  est croissante sur  $[a; b]$  ; donc  $F(b) \geq F(a)$  et  $F(b) - F(a) \geq 0$ .*

### 5.2 Intégration d'une inégalité

#### Théorème

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$ .

Si  $a \leq b$  et si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a; b]$ , alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

*Pour la démonstration, considérer la fonction  $h = g - f$ .*

### 5.3 Encadrement

Soit  $f$  une fonction continue, positive et croissante sur  $[a; b]$  et  $n$  un entier strictement positif.

On partage  $[a; b]$  en  $n$  intervalles d'amplitude  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Sur chaque intervalle  $[a + ih; a + (i + 1)h]$ , où  $i$  varie de 0 à  $n - 1$ , on a l'encadrement

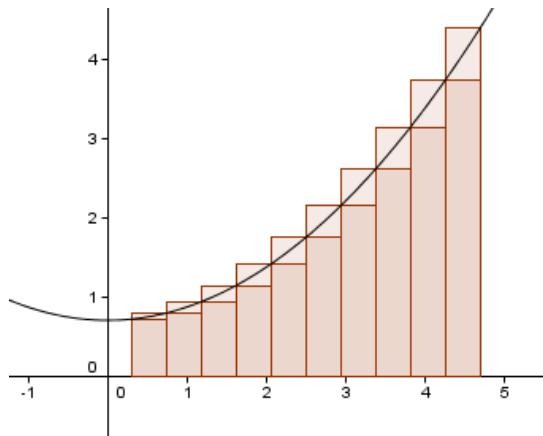
$$f(a + ih) \leq f(x) \leq f(a + (i + 1)h)$$

Donc  $hf(a + ih) \leq \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx \leq hf(a + (i + 1)h)$ , où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

$$h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih) \leq \int_a^b f(x)dx \leq h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i + 1)h)$$

On peut écrire un programme afin d'effectuer ce calcul.



### Algorithme

Les variables sont  $a$  et  $b$  les bornes de l'intervalle,  $n$  le nombre de rectangles,  $h$  le pas (la largeur des rectangles),  $x$  l'abscisse courante,  $s1$  et  $s2$  les sommes des aires.

```

 $h \leftarrow (b - a)/n$ 
 $s1 \leftarrow 0$ 
 $s2 \leftarrow 0$ 
 $x \leftarrow a$ 
POUR  $i$  variant de 0 à  $n - 1$ 
     $s1 \leftarrow s1 + f(x)$ 
     $x \leftarrow x + h$ 
     $s2 \leftarrow s2 + f(x)$ 
FIN POUR
 $s1 \leftarrow h * s1$ 
 $s2 \leftarrow h * s2$ 

```

Si la fonction  $f$  est simplement continue sur  $[a; b]$ , on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant  $f(x)$ , sur chaque intervalle  $[a + ih; a + (i + 1)h]$ , par :  $f(a + (i + 1/2)h)$ .

## 5.4 Valeur moyenne

### Théorème

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Si  $a \leq b$  et si  $m$  et  $M$  sont deux réels tels que  $m \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x \in [a; b]$ , alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

$$\text{et si } a < b, \quad m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

*Démonstration à l'aide du théorème précédent.*

### Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$  le nombre

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$