

1 Intégrale d'une fonction continue et positive

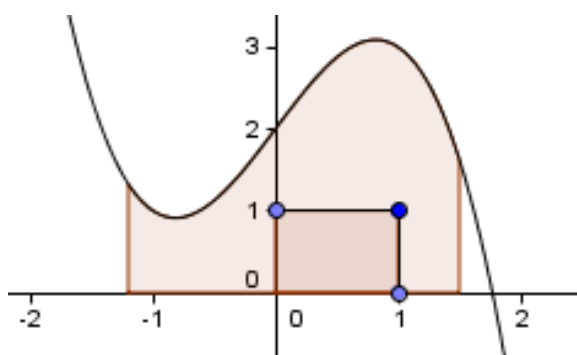
1.1 Définition

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** ,

.....

.....



L'intégrale de f sur $[a; b]$ se note $\int_a^b f(x)dx$.

On dit aussi que $\int_a^b f(x)dx$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b .

1.2 Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \dots$$

$\int_a^b f(x)dx$ se lit aussi " somme de a à b de $f(x)dx$ ".

1.3 Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$; la fonction F définie sur $[a; b]$ par

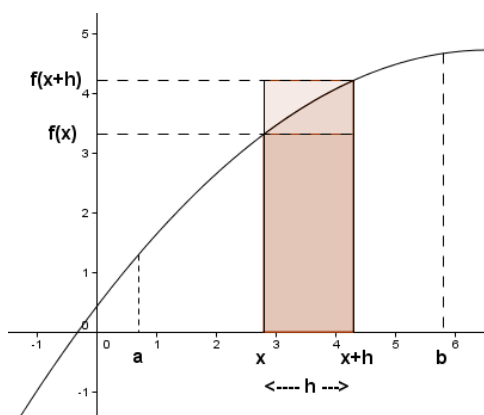
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

.....

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x \in [a; b]$ et $h > 0$,

Ainsi $F(x+h) - F(x)$ est



On a donc

Puisque la fonction f est continue, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \dots\dots$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

2 Primitives et intégrale

2.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
 On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que

2.2 Théorème

Toute fonction continue

Démonstration dans le cas où $I = [a; b]$.

Si f est positive,

Sinon, on admet que f a un minimum m sur $[a; b]$ et on définit une fonction g sur $[a; b]$, par $g(x) = f(x) - m$;
 g est

2.3 Théorème

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur I ,

Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque.

2.4 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel donné quelconque ;

Démonstration

Si G est une primitive quelconque, alors toutes les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par

En particulier, si $I = [a; b]$ et si F est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ alors F

2.5 Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

- si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I .

2.6 Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$\dots \frac{1}{n+1} \dots$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$	
$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I =]0; +\infty[$	
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	

Fonctions composées : on suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle J , dérivable et strictement positive sur un intervalle K .

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = \cos(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	
$f(x) = \sin(ax + b)$ avec $a \neq 0$	$I = \mathbb{R}$	
$f = u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = J$	
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$I = K$	
$f = u'e^u$	$I = J$	
$f = \frac{u'}{u}$	$I = K$	

3 Intégrale d'une fonction continue

3.1 Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.

Alors

On note :

.....

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.2 Définition

On généralise la notion d'intégrale :

soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I .

.....

On note :

.....

3.3 Exemple

Pour $x > 0$,
$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

3.4 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a , b et c des éléments de I .

—

.....

— Inversion des bornes

.....

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

— Relation de Chasles

.....

Démonstration immédiate à l'aide de la définition.

— Linéarité

si k est un réel quelconque, alors

.....

Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

— Linéarité

.....

Démonstration presque immédiate à l'aide de la définition.

4 Calcul d'aires

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

— L'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

.....

.....

- si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

.....

5 Intégrales et inégalités

5.1 Positivité

si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

.....

Démonstration : par définition, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F une primitive de f sur $[a; b]$, c'est-à-dire $F' = f$; donc, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors F est croissante sur $[a; b]$; donc $F(b) \geq F(a)$ et $F(b) - F(a) \geq 0$.

5.2 Intégration d'une inégalité

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

.....

Pour la démonstration, considérer la fonction $h = g - f$.

5.3 Encadrement

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a; b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \frac{b-a}{n}$.

Sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

.....

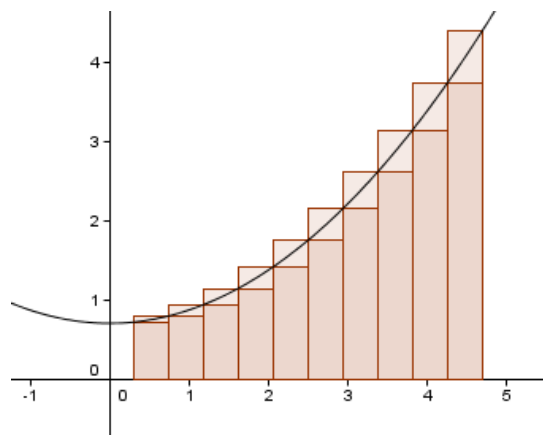
Donc

où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

.....

On peut écrire un programme afin d'effectuer ce calcul.



Algorithme

Les variables sont a et b les bornes de l'intervalle, n le nombre de rectangles, h le pas (la largeur des rectangles), x l'abscisse courante, $s1$ et $s2$ les sommes des aires.

```

 $h \leftarrow (b - a) / n$ 
 $s1 \leftarrow 0$ 
 $s2 \leftarrow 0$ 
 $x \leftarrow a$ 
POUR  $i$  variant de 0 à  $n - 1$ 
     $s1 \leftarrow s1 + f(x)$ 
     $x \leftarrow x + h$ 
     $s2 \leftarrow s2 + f(x)$ 
FIN POUR
 $s1 \leftarrow h * s1$ 
 $s2 \leftarrow h * s2$ 

```

Si la fonction f est simplement continue sur $[a; b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant $f(x)$, sur chaque intervalle $[a + ih; a + (i + 1)h]$, par : $f(a + (i + 1/2)h)$.

5.4 Valeur moyenne

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

.....

et si $a < b$,

Démonstration à l'aide du théorème précédent.

Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

.....