

Cours de terminale S

Fonctions de référence

Les fonctions sinus et cosinus

V. B. J. D. S. B.

Lycée des EK

7 octobre 2019

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe

.....

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M .

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

.....

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

$$\cos : X \in \mathbb{R} \longmapsto \cos X$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe

.....

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M .

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M . On note :

.....

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M . On note :

$$\sin : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$$

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique. (voir cours de seconde)

La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M . On note :

$$\cos : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$$

La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M . On note :

$$\sin : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$$

Ainsi, les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont

...

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont **continues et dérivables** sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \dots\dots$$

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \cos x$$

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{et} \quad (\cos x)' = \dots\dots$$

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{et} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Soit a et b deux réels :

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a \cos(ax + b)$$

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a \cos(ax + b)$$

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Soit a et b deux réels :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a \cos(ax + b)$$

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = -a \sin(ax + b)$$

Démonstration

Démonstration

On sait que si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$

Démonstration

On sait que si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = ag'(ax + b)$

Démonstration

On sait que si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = ag'(ax + b)$
(voir le cours sur les dérivées).

.....

.....

Démonstration

On sait que si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = ag'(ax + b)$
(voir le cours sur les dérivées).

Il suffit d'appliquer cette formule en prenant pour g la fonction sinus ou la fonction cosinus.

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \dots\dots$$

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \dots\dots$$

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont

.....

Périodicité

Pour tout réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de **période 2π** .

Application

Il suffit de connaître les valeurs prises par les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π pour déterminer les valeurs de ces fonctions pour tout réel x .

Application

Il suffit de connaître les valeurs prises par les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π pour déterminer les valeurs de ces fonctions pour tout réel x .

En particulier, pour le tracé des courbes représentatives, il suffit de tracer les courbes sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ par exemple puis de compléter par des translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$. ($\vec{i}$ étant le vecteur unitaire en abscisse).

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = \dots\dots$$

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \dots\dots$$

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

On dit que la fonction sinus est

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

On dit que la fonction sinus est **impaire**

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

On dit que la fonction sinus est **impaire** et que la fonction cosinus est

Parité

Pour tout réel x :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

On dit que la fonction sinus est **impaire** et que la fonction cosinus est **paire**.

Conséquence : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Conséquence : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Application : pour le tracé des courbes représentatives dans un repère orthogonal, on peut se restreindre à l'intervalle $[0; \pi]$, puis compléter sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ à l'aide des symétries précisées ci-dessus et enfin utiliser les translations comme précédemment.

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$$

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée.

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x} \text{ est le } \dots\dots\dots$$

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x} \text{ est le } \text{taux d'accroissement}$$

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le **nombre dérivé**

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 qui est

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 qui est $\cos 0 = 1$.

Démonstration

La limite du quotient n'est pas immédiate puisqu'on obtient une forme indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant la définition du nombre dérivé :

$\frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Sa limite quand x tend vers 0 est le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 qui est $\cos 0 = 1$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x} = 1.$$

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité énoncées plus haut, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.
Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

Fonction cosinus

x	0	π
$f'(x) = -\sin x$		
$f(x) = \cos x$		

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité énoncées plus haut, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.
Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

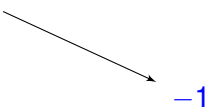
Fonction cosinus

x	0	π
$f'(x) = -\sin x$	0	0
$f(x) = \cos x$		

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité énoncées plus haut, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.
Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

Fonction cosinus

x	0	π
$f'(x) = -\sin x$	0	0
$f(x) = \cos x$	1	-1



A blue arrow points from the value 1 at $x=0$ to the value -1 at $x=\pi$ in the row for $f(x) = \cos x$, indicating the decreasing nature of the function over the interval $[0, \pi]$.

Grâce aux propriétés de périodicité et de parité énoncées plus haut, on peut limiter l'étude des variations à l'intervalle $[0; \pi]$.
Le signe des fonctions dérivées s'obtient avec le cercle trigonométrique.

Fonction cosinus

x	0	π
$f'(x) = -\sin x$	0	0
$f(x) = \cos x$	1	-1



Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x) = \cos(x)$			
$f(x) = \sin(x)$			

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x) = \cos(x)$	+	0	-
$f(x) = \sin(x)$			

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x) = \cos(x)$		$+$	$-$
$f(x) = \sin(x)$	0	1	0

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x) = \cos(x)$		$+$	$-$
$f(x) = \sin(x)$	0	1	0

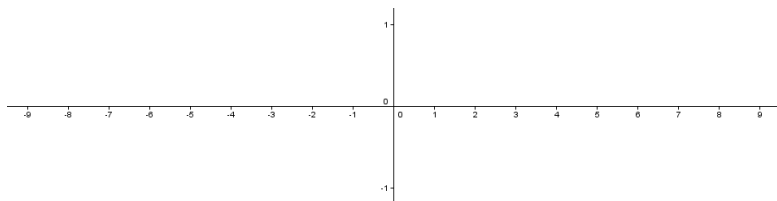


FIGURE – *Courbe représentative de la fonction cosinus*

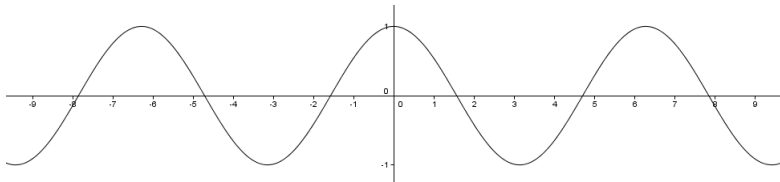


FIGURE – *Courbe représentative de la fonction cosinus*

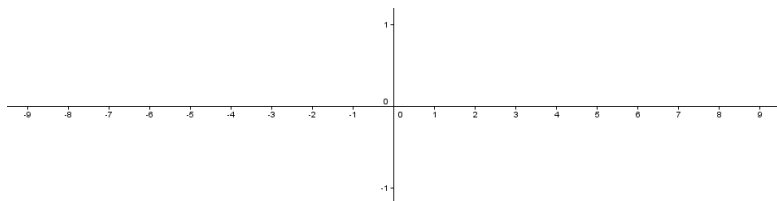


FIGURE – *Courbe représentative de la fonction sinus*

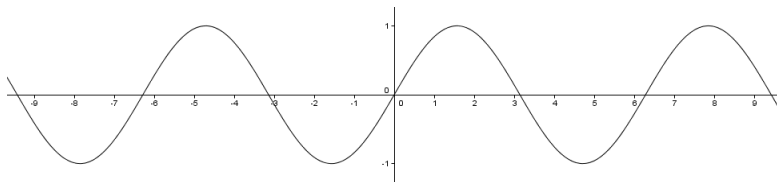


FIGURE – *Courbe représentative de la fonction sinus*