Terminale S (2016-2017)
Géométrie dans l'espace

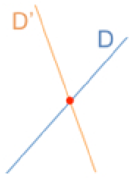
1 Positions relatives de droites et de plans

1.1 Positions relatives de deux droites

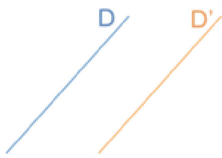
Deux droites de l'espace sont :

- soit **coplanaires** ; elles sont alors

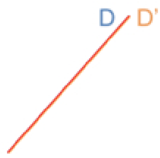
soit sécantes,



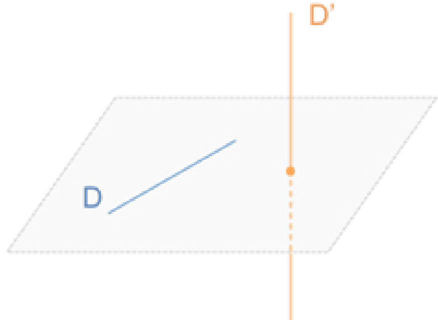
soit parallèles, et dans ce cas elles sont



strictement parallèles



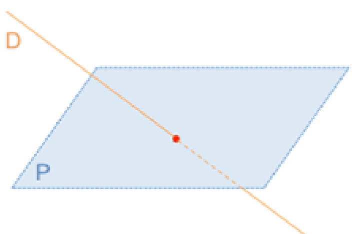
ou confondues



- soit **non coplanaires**

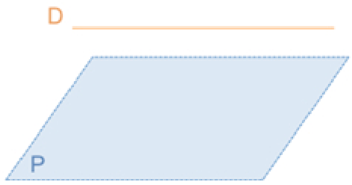
1.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont :
• soit sécants, et l'intersection est alors un point ;

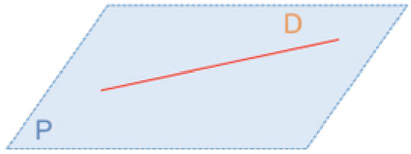


● soit parallèles et dans ce cas :

la droite est strictement parallèle au plan,



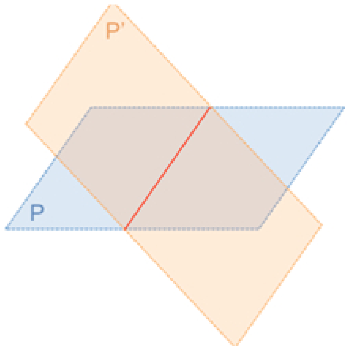
ou la droite est contenue dans le plan.



1.3 Positions relatives de deux plans

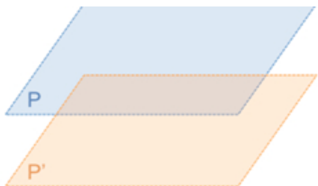
Deux plans de l'espace sont :

● soit sécants, et dans ce cas l'intersection est une droite ;



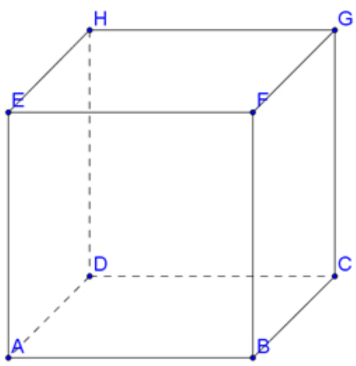
● soit parallèles, et dans ce cas ils sont

strictement parallèles,



ou confondus.

Exemple du cube



2 Parallélisme

2.1 Entre droites

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe aussi l'autre.

2.2 Entre plans

- Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
- Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un second plan, alors les deux plans sont parallèles.
- Un plan coupe deux plans parallèles selon des droites parallèles.

Remarque
Toutes les propriétés de géométrie plane restent valables dans un plan de l'espace.

2.3 Entre droites et plans

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

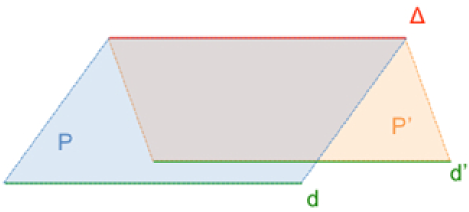
- Si une droite est parallèle à une seconde, alors elle est parallèle à tous les plans contenant cette seconde droite.

- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

- **Théorème du toit (preuve dans la suite du cours)**

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :
- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors les droites d et d' sont également parallèles à la droite Δ.

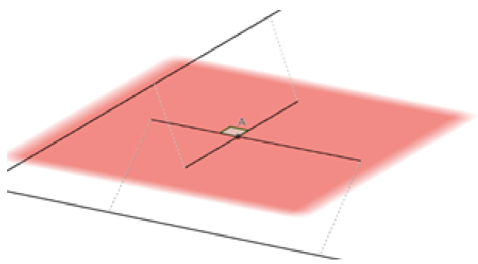


3 Orthogonalité

3.1 Orthogonalité de droites

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

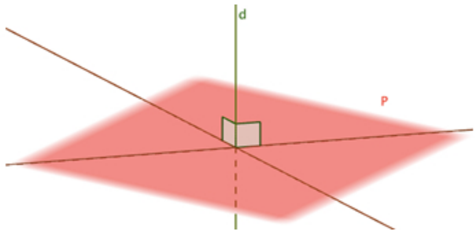


Propriété
Si deux droites sont parallèles, alors tout droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

4 Géométrie vectorielle dans l'espace

4.1 Notion de vecteur dans l'espace

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

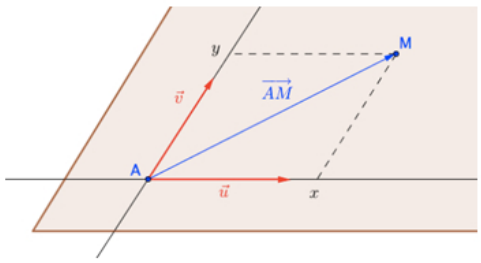
Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane ; relation de Chasles, colinéarité, etc ... restent valides.

4.2 Caractérisation d'un plan

Définition

Soient A un point de l'espace, et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\ \vec{u} + y\ \vec{v}$, avec x et y des réels, est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarques

- Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.
- Un plan est ainsi totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.
- Les plans $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$ (caractérisés par un point et deux vecteurs) sont parallèles pour tous points A et B.

4.3 Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que des vecteurs sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Propriétés

– Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$$

– Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si l'égalité $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ implique $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Remarques
– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il suffit en fait de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ pour montrer la coplanarité des trois vecteurs.
– Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

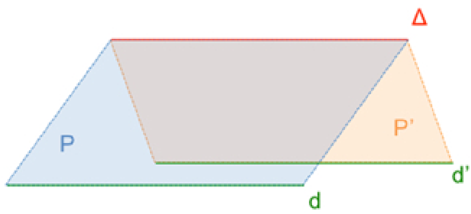
Théorème
Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Propriété et définition
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
$(x;y;z)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

4.4 Application : démonstration du théorème du toit

Rappel du théorème
On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :
- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors les droites d et d' sont également parallèles à la droite Δ.



Démonstration
d et d' sont parallèles : on note $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et de d', et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
On veut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (et donc par suite, d et d' seront bien parallèles à Δ).

Notons $(\vec{u},\vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P, et $(\vec{u},\vec{v'})$ un couple de vecteurs directeurs du plan P'. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont non coplanaires, puisque les plans P et P' sont sécants.

La droite Δ est contenue dans P, donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_1 et y_1 tels que $\vec{w}=x_1\vec{u}+y_1\vec{v}$.

De même, la droite Δ est contenue dans P', donc $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires. Ainsi il existe des réels x_2 et y_2 tels que $\vec{w}=x_2\vec{u}+y_2\vec{v'}$.

Ainsi, $x_1\vec{u}+y_1\vec{v}=x_2\vec{u}+y_2\vec{v'}$.

Donc $(x_1-x_2)\vec{u}=y_2\vec{v'}-y_1\vec{v}$.

Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires, on a forcément $x_1-x_2=y_1=y_2=0$.
Ainsi $\vec{w}=x_1\vec{u}$, et donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, ce qui prouve que d et d' sont bien parallèles à Δ.

5 Repérage dans l'espace

5.1 Repères de l'espace

Définition

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x est l'abscisse du point M, y est l'ordonnée du point M et z est la cote.

On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

5.2 Colinéarité et alignement dans l'espace

Théorèmes

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\ (x; y; z)$ et $\vec{v}\ (x'; y'; z')$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$

- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

5.3 Milieu, distance

Théorèmes

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- La distance AB est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

6 Représentations paramétriques

6.1 Représentations paramétriques d'une droite

Théorème

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\ (a; b; c)$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

Preuve

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ (x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\vec{u}\ (a; b; c)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

Définition

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + x_A \\ y & = & bt + y_A \\ z & = & ct + z_A \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}, \text{ est appelé } \textbf{représentation paramétrique} \text{ de la droite } \Delta.$$

Remarques

– Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend du choix du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$.

– Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de la demi-droite d'origine A et de même sens que $\vec{u}$.

6.2 Représentations paramétriques d'un plan

Théorème

$M(x;y;z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\ (a;b;c)$ et $\vec{v}\ (a';b';c')$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right.$$

Définition

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at + a't' + x_A \\ y & = & bt + b't' + y_A \\ z & = & ct + c't' + z_A \end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}, \text{ est appelé } \textbf{représentation paramétrique} \text{ du plan P.}$$

Remarque

Il existe plusieurs représentations paramétriques pour un même plan : chaque représentation dépend du choix du point A et des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.