

Informatique en CPGE (2015-2016) Devoir maison 1

Ce devoir sera fait en groupe (un devoir par groupe de collés).

Chacun des noms des fichiers programmes doit commencer par le nom d'un élève (les noms des autres élèves ayant participé seront écrits en commentaire au début de chaque programme). La présentation est importante ; pour écrire un commentaire sur une ligne, on commence par le caractère #, pour des commentaires sur plusieurs lignes, on les entoure par des triples guillemets (""""commentaires ...""").

Les programmes seront envoyés en une seule fois par email à l'adresse pcsi.info@orange.fr.

1 Itérations

Exercice 1

Ecrire un programme (nommé "nom_dm1ex1.py") qui calcule et affiche la somme des n premiers entiers : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$.

La formule $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ permettra de vérifier la réponse affichée.

Compléter le programme afin qu'il affiche aussi la somme des carrées $\sum_{i=1}^n i^2$, des cubes $\sum_{i=1}^n i^3$ et des puissances quatre $\sum_{i=1}^n i^4$, des n premiers entiers.

Exercice 2

Ecrire un programme (nommé "nom_dm1ex2.py") qui détermine et affiche tous les diviseurs d'un entier non nul n .

Compléter ce programme afin qu'il détermine si le nombre n est parfait. (un nombre parfait est un entier égal à la somme de tous ses diviseurs excepté lui-même.)

2 Suites de Syracuse

On appelle suite de Syracuse une suite d'entiers naturels définie par récurrence de la manière suivante : le premier terme est un nombre entier naturel non nul ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On répète cette procédure pour déterminer le successeur d'un terme quelconque de la suite.

Par exemple, la suite des nombres obtenue à partir de 14 est : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... On l'appelle la suite de Syracuse du nombre 14, notée S_{14} .

Lorsque le nombre 1 est atteint, la suite des valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2, ...) se répète indéfiniment.

Pour chaque valeur initiale, on obtient une suite de nombres différente. A priori, il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple d'une telle suite.

La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture trèhe ou problème $3x + 1$ est l'hypothèse selon laquelle les suites de Syracuse de tous les nombres strictement positifs atteignent 1. Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.

2.1 Origine

Le problème $3x + 1$ a d'abord été étudié par Lothar Collatz qui dès 1928 s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers ; puis il a été diffusé en Amérique à l'université de Syracuse en 1952 par Helmut

Hasse et au Laboratoire de Los Alamos par Stanislas Ulam. Dans les années 1960, le problème est repris par Shizuo Kakutani qui le diffuse dans les universités de Yale et Chicago.

2.2 Algorithme et programme

Ecrire un programme nommé "nom_syracuse.py" qui prend en entrée la valeur initiale u_0 de la suite et permet d'afficher tous les termes de la suite jusqu'au premier terme qui atteint la valeur 1.

Utiliser ce programme pour déterminer les valeurs de la suite S_{15} puis de la suite S_{127} .

2.3 Vocabulaire

On définit pour une suite de Syracuse :

- le temps de vol : c'est l'indice du premier terme égal à 1 ;
le programme doit permettre de vérifier qu'il est de 17 pour la suite S_{15} et de 46 pour la suite S_{127} ,
- le temps de vol en altitude : c'est l'indice du premier terme tel que le terme suivant soit strictement plus petit que l'entier initial ;
le programme doit permettre de vérifier qu'il est de 10 pour la suite S_{15} et de 23 pour la suite S_{127} ,
- l'altitude maximale : c'est la valeur maximale de la suite ;
le programme doit permettre de vérifier qu'elle est de 160 pour la suite S_{15} et de 4372 pour la suite S_{127} .

Compléter le programme afin de déterminer le nombre inférieur ou égal à 10000 qui a le plus grand temps de vol.

2.4 Compléments (travail personnel)

- On peut utiliser un tableur pour calculer les termes de la suite et faire une représentation graphique.
- On peut écrire une version condensée : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n pair et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2}$ si u_n impair.
- Au lieu de prouver que la suite directe, partant de n'importe quel entier naturel non nul, mène toujours à 1, on essaye de démontrer que l'algorithme inverse, partant de 1, est capable de générer tous les nombres entiers naturels non nuls.

Ces algorithmes inverses peuvent être représentés par des arbres, dont la racine est 1. Si la conjecture est vraie, ces arbres recouvrent tous les entiers naturels non nuls.